Université de Grenoble Alpes **Année 2016-2017**
Licence de mathématiques, 3e année **Topologie, parcours B**

Contrôle continu du 30 novembre 2016

Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.

Question de cours

1. Montrer que l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n), |x_i| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.
2. Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que toutes les fonctions linéaires de E dans F sont continues.
4. ? ?

Exercice 1

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ inversible. On note $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ définit une norme équivalente à $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. En utilisant le fait que A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire euclidien canonique), montrer qu'il existe deux constantes positives ou nulles telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad C_1\|x\|_2 \leqslant \|Ax\|_2 \leqslant C_2\|x\|_2$$
où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne et les constantes C_i peuvent se calculer à partir des valeurs propres de A.
À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et f une bijection linéaire continue de E sur E, dont l'inverse est également continu (f est un automorphisme de E et un homéomorphisme de E sur E). Montrer que l'application $x \mapsto N(f(x))$ définit une norme équivalente à N sur E.

Exercice 2 On note $E = \ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |u_n|$ converge, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On considère l'application $\varphi_a : (u_n) \in (E, \|\cdot\|_1) \mapsto (v_n) \in (E, \|\cdot\|_1)$, où $v_n = a_n u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que φ_a est une application linéaire de E dans lui-même. Déterminer son noyau $\operatorname{Ker} \varphi_a$.
2. Montrer que φ_a est continue et déterminer la norme $|||\varphi_a|||$.
3. On suppose désormais qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ si $n > N$. On pose $E_N = \{u \in E : \forall n > N, u_n = 0\}$.
   (a) Montrer que E_N est un sous-espace vectoriel fermé de E.
   (b) Montrer que tout élément de $\operatorname{Im} \varphi_a$ admet un antécédent dans E_N.
   (c) On pose $B = \varphi_a(BF_1(0, 1))$ où $BF_1(0, 1)$ est la boule unité fermée de E (pour la norme $\|\cdot\|_1$). Montrer que l'ensemble B est contenu dans un compact de E. En déduire que son adhérence est compacte.

(d) Montrer que B est fermé. En déduire qu'il est compact.

Exercice 3 (Jauge d'un convexe)

On se donne K un convexe de $\mathbb{R}^n$ qui est compact, symétrique par rapport à l'origine, d'intérieur non vide. On se propose de montrer qu'il est alors la boule unité d'une norme de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ qu'il ne sera pas nécessaire de préciser.

Les hypothèses se traduisent par

— Convexe : si $(x, y) \in K^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in K$.
— Symétrique par rapport à l'origine : si $x \in K$, $-x \in K$.

On pose dans la suite pour $x \in \mathbb{R}^n$: $I_x = \{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}$, $M_x = \sup I_x$ et $J(x) = 1/M_x$ (0 si I_x n'est pas majoré).

1. Montrer que $0 \in \mathring{K}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble I_x n'est pas vide.
3. Montrer que I_x est un intervalle qui contient 0.
4. Montrer que $J(0) = 0$.
5. On suppose $x \neq 0$.
   (a) Montrer que I_x est borné et en déduire que $J(x) > 0$.
   (b) En utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, montrer que $\sup I_x = \max I_x$.
   (c) Montrer que $J(-x) = J(x)$.
   (d) Pour $\alpha > 0$, déterminer $I_{\alpha x}$ en fonction de I_x et en déduire que $J(\alpha x) = J(x)$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $x = J(x) \cdot x_0$.
7. Soient $x_0, y_0 \in K$, a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $(ax_0+by_0)/(a+b) \in K$.
8. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. On pose $a = J(x)$, $b = J(y)$. Montrer que $\frac{1}{a+b} \in I_{x+y}$ et en déduire que $J(x + y) \leqslant J(x) + J(y)$.
9. Conclure.
10. Si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, montrer que la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^n, N)$ est un compact convexe, symétrique par rapport à l'origine, d'intérieur non vide.